

Prop 4: Les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i) f est diagonalisable
- (ii) Il existe une base de E formée de vect. pps de f
- (iii) La somme des E_λ de f est égale à E
- (iv) La somme des dimensions des E_λ est égale à $\dim E$.

I. Développement

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Supposons f diagonalisable

$\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E dans laquelle $\text{Mat}_B(f)$ diagonale.

Donc $\exists (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ (d_i non nécessairement distincts).

Or $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = d_i \cdot e_i$, et $e_i \neq 0$, donc $E_i \neq \{0\}$, et d_i valeur propre et e_i vecteur propre associé.

Donc $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres pour f .

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base formée de vect. pps pour f .

Ce sont des vect. pps donc il existe des val. pps associées:

$\exists (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ (non nécessairement distincts) tq $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = d_i \cdot e_i$.

Chaque d_i est une val. ppe pour f , notons $\Lambda = \{d_i / i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

Alors:

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \supset \sum_{\lambda \in \Lambda} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \sum_{i=1}^n \text{Ker}(f - d_i \text{Id}_E) \supset \sum_{i=1}^n \mathbb{K} e_i = E$$

car $\Lambda \subset \text{Sp}(f)$

et vect ppe pour d_i , donc
 $e_i \in \text{Ker}(f - d_i \text{Id}_E)$ car,
 donc $\text{Vect}(e_i) = \mathbb{K} \cdot e_i \subset \text{Ker}(f - d_i \text{Id}_E)$

Or $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \subset E$ (somme de sous), donc $E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Supposons que la somme des sous-espaces propres soit égale à E .

Cette somme est directe, donc:

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda\right) = \dim E.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Supposons que la somme des dimensions des sous-espaces propres soit égale à $\dim E$.

On note $k = \text{Card}(\text{Sp}(f))$,

et $\text{Sp}(f) = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$.

Chaque E_{μ_j} , $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ admet une base B_j .

On va concaténer les bases des sous-espaces propres.
Notons $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$.

Les sous-espaces propres E_{μ_j} sont en somme directe, et chaque B_j , comme E_{μ_j} est une base, est libre, donc B est libre.

$$\text{De plus, } \text{Card}(B) = \sum_{j=1}^k \text{Card}(B_j) = \sum_{j=1}^k \dim(E_{\mu_j}) \stackrel{(iv)}{=} \dim(E)$$

Donc B est une base de E .

De plus, la matrice de f dans B est diagonale, puisque les éléments de B sont des vecteurs propres pour f .

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_k I_{d_k} \end{pmatrix}$$

où $\forall j \in \{1, k\}$, $d_j = \text{Card}(B_j)$. ■

Remarque: Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, ses ltg diagonaux d'une base adéquate sont ses valeurs propres, écrites autant de fois que leur multiplicité.